Jurnal Natural
Vol.17, No.2, 2017
pISSN 1411-8513
eISSN 2541-4062

SEMI-IMPLICIT NUMERICAL SCHEMA IN SHALLOW WATER EQUATION

Safwandi[1]*, Syamsul Rizal[2], Tarmizi[1]

[1]Jurusan Matematika, Pascasarjana Matematika, Universitas Syiah Kuala, Banda Aceh
[2]Jurusan Ilmu Kelautan, Universitas Syiah Kuala, Banda Aceh
*Email: safwandi@rocketmail.com

Abstract. *A two-dimensional shallow water equation integrated on depth water based on finite differential methods. Numerical solutions with different methods consist of explicit, implicit and semi-implicit schemes. Different methods of shallow water equations expressed in numerical schemes. For bottom-friction is described in semi-implicitly. This scheme will be more flexible for initial values and boundary conditions when compared to the explicit schemes.*

Keywords: *2D numerical models, shallow water equations, explicit and semi-implicit schema.*

I PENDAHULUAN

Fenomena dinamika laut seperti gelombang pasang surut, gelombang angin, gelombang tsunami dan gaya-gaya adalah fenomena model air dangkal yang sering terjadi pada struktur tepi pantai [1]. Model air dangkal ini bergantung pada kedalaman dan panjang air laut dengan ketentuan skala vertikal fluida lebih kecil bila dibandingkan dengan skala horizontal. Secara umum model air dangkal diimplementasikan pada perairan permukaan bebas yang mengalir seperti arus periodik pasang surut dan fenomena gelombang temporer (tsunami, gelombang banjir, bendungan pemecah ombak) [2]. Karakteristik umum aliran model air dangkal adalah nilai perbandingan antara skala vertikal dan horizontal bernilai kecil. Secara matematis, asumsi bahwa $H/L \ll 1$, dimana H dan L berturut-turut menyatakan skala panjang vertikal dan horizontal [3]. Skala perbandingan air dangkal akan lebih valid jika diasumsikan air dangkal $H/L \leq 0.05$ [4].

Persamaan air dangkal terdiri dari suatu sistem Persamaan Diferensial Parsial (PDP) orde pertama [5]. Sebagai solusi dari permasalahan hidrodinamika laut yang terjadi di dunia nyata, permasalahan persamaan air dangkal didasarkan pada konsep konservasi massa (persamaan kontinuitas) dan persamaan momentum [6]. Persamaan air dangkal dapat pula diturunkan dari persamaan Navier-Stokes karena persamaan ini pada dasarnya diturunkan dari persamaan konservasi massa dan momentum [7]. Model ini dapat memprediksi kecepatan dan ketinggian air dari bermacam-macam titik serta daerah aliran air dengan waktu yang berbeda. Model dapat menunjukkan kontribusi vektor dinamika air yang terjadi [2]. Solusi numerik model menggunakan metode beda hingga (*finite different*) terdiri dari skema eksplisit, implisit dan skema *hybrid*. Pemilihan metode beda hingga dikarenakan kemudahan pembuatan algoritma untuk kasus dua-dimensi dan lebih fleksibel terhadap kondisi batas. Jika ditinjau dari pemrograman komputer maka skema eksplisit lebih mudah dibanding dengan skema implisit dan skema *hybrid*, karena skema eksplisit tidak memerlukan proses manipulasi matriks, tetapi jika ditinjau dari fleksibilitas nilai awal dan syarat batas skema implisit dan hybrid lebih luwes dibandingkan dengan skema eksplisit. Dalam masalah ini solusi numerik dengan menggunakan metode beda hingga dideskripsikan terutama untuk skema semi-implisit untuk gesekan dasar laut dan pendekatan skema eksplisit untuk persamaan air dangkal. Solusi numerik ini merujuk pada referensi *ocean modeling for beginner* [3].

II METODOLOGI

Model yang digunakan dalam penelitian ini terdiri dari suatu set sistem persamaan air dangkal terdiri dari persamaan momentum dan persamaan kontinuitas yang diintegrasikan seragam pada kedalaman (Pers. 1-3) [3] :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + Adv_h(u) - fv = -g\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\tau_x^w - \tau_x^b}{\rho_o h} \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + Adv_h(v) + fu = -g\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\tau_y^w - \tau_y^b}{\rho_o h} \quad (2)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial (hu)}{\partial x} + \frac{\partial (hv)}{\partial y} = 0 \qquad (3)$$

Adv_hadalah adveksi suku nonlinear dan $Diff_h(\xi)$ adalah momentum dan friksi lateral yang ditentukan oleh Pers. (4).

$$Advh(b): \frac{\partial B}{\partial t} = -u\frac{\partial B}{\partial x} - v\frac{\partial B}{\partial y} \qquad (4)$$
$$= -\frac{\partial (uB)}{\partial x} - \frac{\partial (vB)}{\partial y} = -B\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

Pers. (1)-(3) disajikan dalam koordinat kartesius sebagai perubahan langkah waktu dan perubahan adveksi pada perataan kedalaman arus, gaya coriolis, tekanan gradient, tekanan dasar laut, difusi horizontal, dimana t adalah waktu (s), diukur relatif terhadap dimulainya simulasi. x, y adalah koordinat kartesian persegi (m), $\eta(x, y, t)$ adalah elevasi permukaan air laut di atas rata-rata permukaan laut, $h(x, y, t)$ adalah total kedalaman sampai ke dasar laut, $u(x, y, t)$ adalah komponen kecepatan melintang diratakan pada kedalaman (ms^{-1}), $v(x, y, t$ adalah komponen kecepatan membujur, diratakan kedalamannya (ms^{-1}), $f$adalah parameter coriolis (s^{-1}), $f = 2\Omega \sin\varphi$ $(\Omega \approx 2\pi/3600 \times 23.9333)$ adalah kecepatan sudut rotasi bumi dan φ adalah garis lintang), ρ adalah massa jenis air laut, diasumsikan konstan pada $\rho \approx 1027\ \mathrm{kgm}^{-3}$. τ_x^bdanτ_y^b adalah gesekan bawah air, τ_x^wdanτ_y^w adalah tekanan angin

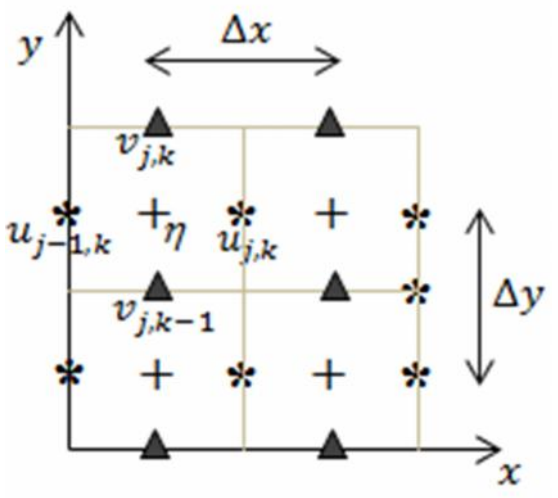
Solusi numerik persamaan diperoleh melalui diskritasi persamaan dalam spasi horizontal menggunakan skema eksplisit beda hingga berdasarkan grid Sel. Kriteria Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) digunakan dalam determinansi langkah waktu untuk suatu spasi grid.

III HASIL DAN PEMBAHASAN

Penentuan langkah waktu (Δt) pada skema eksplisit memenuhi syarat stabilitas komputasi Courant-Friedrich-Lewy atau kondisi CFL. Kriteria stabilitas untuk persamaan air dangkal, kondisi CFL menggunakan Pers. (5) [3].

$$\Delta t \leq \frac{(\Delta x, \Delta x)}{\sqrt{2gh_{max}}} \qquad (5)$$

dimana persamaan tersebut menjadi suatu masalah jika diterapkan di laut dalam. Diskritasi model persamaan air dangkal berdasarkan pada Gambar 1. Diskritaskan persamaan air dangkal dapat dilakukan dengan mengabaikan suku adveksi, gaya coriolis, gaya angin dan diffusi terlebih dahulu.



Gambar 1 Ilustrasi grid sel: * arah x atau komponen u, ▲ arah y atau komponen v, + elevasi permukaan air

$$u_{j,k}^{n+1} \approx u_{j,k}^{n} - \Delta t \cdot g\left(\eta_{j,k+1}^{n} - \eta_{j,k}^{n}\right)/\Delta x \qquad (6)$$
$$v_{j,k}^{n+1} \approx v_{j,k}^{n} - \Delta t \cdot g\left(\eta_{j+1,k}^{n} - \eta_{j,k}^{n}\right)/\Delta y \qquad (7)$$
$$\eta_{j,k}^{*} = \eta_{j,k}^{n} - \Delta t \cdot \left\{\left(u_{j,k}^{n+1} \cdot h_e - u_{j,k-1}^{n+1} \cdot h_w\right)/\Delta x - \left(v_{j,k}^{n+1} \cdot h_n - v_{j-1,k}^{n+1} \cdot h_s\right)/\Delta y\right\} \qquad (8)$$

dimana h_e dan h_w adalah ketebalan lapisan pada sisi barat dan timur pada kontrol volume, h_s dan h_n adalah ketebalan lapisan pada sisi utara dan selatan. Untuk gesekan dasar digunakan pendekatan semi-implisit, yaitu:

$$u_{j,k}^{n+1} = u_{j,k}^{n} - r\Delta t \cdot u_{j,k}^{n+1}\sqrt{\left(u_{j,k}^{n}\right)^2 + \left(v_{u}^{n}\right)^2} / h_u \qquad (9)$$

$$v_{j,k}^{n+1} = v_{j,k}^{n} - r\Delta t \cdot v_{j,k}^{n+1}\sqrt{\left(u_{j,k}^{n}\right)^2 + \left(v_{j,k}^{n}\right)^2} / h_v \qquad (10)$$

Dengan mengatur kembali persamaan di atas maka:

$$u_{j,k}^{n+1} = u_{j,k}^{n} / \left(1 + R_x\right) \qquad (11)$$
$$v_{j,k}^{n+1} = v_{j,k}^{n} / \left(1 + R_y\right) \qquad (12)$$

Parameter R_x dan R_y diberikan oleh:

$$R_x = r\Delta t\sqrt{\left(u_{j,k}^{n}\right)^2 + \left(v_{u}^{n}\right)^2} / h_u \qquad (13)$$

$$R_y = r\Delta t\sqrt{\left(u_{v}^{n}\right)^2 + \left(v_{j,k}^{n}\right)^2} / h_v \qquad (14)$$

dimana parameter R_x dan R_y selalu bernilai positif sehingga gesekan bawah perlahan-lahan kecepatannya akan berkurang. Penggunaan semi-implisit mendekati pada gesekan bawah, persamaan beda hingga yang menyatakan konservasi momentum oleh

$$u_{j,k}^{n+1} = \left(u_{j,k}^{n} + \Delta u_{j,k}^{n}\right)/(1 + R_x) \quad (15)$$

$$v_{j,k}^{n+1} = \left(v_{j,k}^{n} + \Delta v_{j,k}^{n}\right)/(1 + R_y) \quad (16)$$

dimana parameter R_x dan R_y diperoleh dari persamaan (13) dan (14)

$$\Delta u_{j,k}^{n} = \Delta t \left\{ \tau_x^{wind} / \rho_0 h_u - g\left(\eta_{j,k+1}^{n} - \eta_{j,k}^{n}\right) / \Delta x \right\} \quad (17)$$

$$\Delta v_{j,k}^{n} = \Delta t \left\{ \tau_y^{wind} / \rho_0 h_v - g\left(\eta_{j+1,k}^{n} - \eta_{j,k}^{n}\right) / \Delta y \right\} \quad (18)$$

Diskritasi persamaan-persamaan di atas merupakan suatu set persamaan air dangkal lengkap.

KESIMPULAN

Diskritasi persamaan sangat penting dilakukan dalam metode numerik sehingga memudahkan dalam melakukan pemodelan persamaan. Persamaan air dangkal banyak digunakan pemodel dalam mengkaji kondisi fisis air laut dan atmosfir. Oleh karena itu, untuk menunjukkan kondisi fisis, secara numerik metode beda hingga sebagai salah satu alternatif dalam mendiskritasi persamaan air dangkal.

UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Yudi Haditiar yang telah membantu penelitian.

REFERENSI

1. Hassan, H. S., Ramadan, K. T., Hanna, S. N. 2010. Numerical Solution of the Rotating Shallow Water Flows with Topography Using the Fractional Steps Method, *Scie.Res,App.Math*. (1):104-117.
2. Omer, S, Kursat, K. 2011. High-Order Accurate Spectral Difference Method For Shallow Water Equations. *IJRRAS6*. Vol. 6. No. 1.
3. Kampf, J. 2009. *Ocean Modelling for Beginners.* Springer Heidelberg Dordrecht. London, New York.
4. Wang, Z. L., Geng, Y. F. 2013. Two-Dimensional Shallow Water Equations with Porosity and Their Numerical scheme on Unstructured Grids. *J. Water Science and Engineering*. Vol. 6, No. 1, 91-105.
5. Saiduzzaman, Sobuj. 2013. Comparison of Numerical Schemes for Shallow Water Equation. Global *J. of Sci. Fron. Res. Math. and Dec. Sci*. Vol. 13 (4).
6. Sari, C. I., Surbakti, H., Fauziyah., Pola Sebaran Salinatas dengan Model Numerik Dua Dimensi di Muara Sungai Musi. Maspari *J*. Vol. 5 (2): 104-110.
7. Bunya, B., Westerink, J. J. dan Shinobu, Y. 2004. Discontinuous Boundary Implementation for the Shallow Water Equations. *Int. J. Numer*. Meth. *Fluids 2005* (47): 1451–1468.